Tema 4. La integral

Introducción

El cálculo integral se vuelve cada vez más destacado, pues se ha incorporado en diferentes carreras y se le han encontrado una gran variedad de aplicaciones.

Las integrales tienen características que facilitan su resolución, así que a lo largo de este tema conocerás sus propiedades básicas y las fórmulas. Con ellas, podrás clasificar el tipo de funciones dentro de la integral, así como seleccionar el método más adecuado para solucionar una integración.

Explicación

Derivadas e integrales son operaciones contrarias; de hecho, a las integrales o integrales básicas se les conoce como "antiderivadas" (Araujo, 2018).

Existen diferentes maneras de derivar estas funciones, las cuales dependen de los elementos que las conforman. A la vez, existen varios métodos para integrar, según las características de la función dentro de la integral.

Los cálculos diferencial e integral se complementan. Al contar con una función $f(x)$, la derivada adquiere una $f'(x)$ y esta se integra y regresa a $f(x)$ original (Oteyza, Lam, Hernández y Carrillo, 2019).

Este es el símbolo de integración: $\int$

Por ejemplo, supongamos que en $f(x)\,d(x)$ existe una función derivada, entonces, se puede determinar de la siguiente manera:

$$\int f(x)d(x)$$

Antiderivadas

Las antiderivadas son el proceso contrario a la derivación y, generalmente, se trata de las primeras integrales en enseñarse. Al igual que las derivadas, las integrales también poseen fórmulas que permiten conocer su estructura, clasificación y, sobre todo, planificar su resolución.

A continuación, se presenta la tabla de integrales básicas.

Tabla de integrales básicas

1.- $\int dx = x + C$	2.- $\int x^n\,dx = \frac{x^n+1}{n+1} + C$
3.- $\int \frac{1}{x}dx = ln\lvert x\rvert + C$	4.- $\int e^x\,dx = e^x + C$
5.- $\int a^x dx = \frac{ax}{lna} + C$	6.- $\int senx\,dx = -cosx + C$
7.- $\int cosx\,dx = senx + C$	8.- $\int sec^2x\,dx = tgx + C$
9.- $\int csc^2x\,dx = -cotgx + C$	10.- $\int secx\,tgx\,dx = -secx + C$
11.- $\int cscx\,cotgx\,dx = -cscx + C$	12.- $\int tgx\,dx = -ln[cosx] + C$

Tabla 1. Integrales básicas.
Fuente: Araujo, F. (2018). *Cálculo integral*. Ecuador: Universitaria Politécnica Salesiana.

Partición de funciones y propiedades de la integral

De acuerdo con Araujo (2018), si *f* y *g* son funciones integrales, cuentan con distintas propiedades que facilitan su solución. Entre ellas, se encuentran las que se explican a continuación.

Regla de la suma y resta. De acuerdo con Araujo (2018), si *f* y *g* son funciones integrales, entonces:

$$\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)$$

Examina el siguiente ejemplo.

1. Existen tres términos que puedes integrar de manera independiente, ya que solo se suman y restan entre ellos.

$$\int (7x^2 + 4x - 3)d(x)$$

2. Al disociar cada término con un signo "+" o "–", se separan para una integración más sencilla; sin embargo, si estas funciones se multiplican o dividen, no se debe proceder de dicha manera.

$$\int 7x^2d(x) + \int 4xd(x) - \int 3d(x) =$$

3. En estos casos, primero suma 1 al exponente y después divide entre el número obtenido:

$$\int \frac{7x^{2+1}}{2+1}d(x) + \int \frac{4x^{1+1}}{1+1}d(x) - \int 3xd(x)$$

$$\frac{7x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x$$

$$\frac{7x^3}{3} + \frac{4x^2}{\cancel{2}} - 3x$$

$$\frac{7x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

Recuerda que, al final de cada integral, debes anotar $+c$. Este símbolo indica que en la función integrada puede existir una constante, aunque el dato no se sabe con precisión; sin embargo, es necesario representarlo:

$$\frac{7x^3}{3} + 2x^2 - 5x + c$$

Integrales con solución de logaritmo natural (ln). El siguiente ejemplo te servirá para integrar una fracción, ya que esto contribuye a verificar esta regla. Las integraciones de fracciones se representan así:

$$\frac{7x^3}{3} + 2x^2 - 5x + c$$

Si el espacio del numerador corresponde a la derivada del denominador, se trata de una integración con resultado de logaritmo natural. Esta es su fórmula:

$$\int \left(\frac{v'}{v}\right) d(x) = \ln(v) + c$$

Por ejemplo, en la integral 3 de la tabla 1, puedes observar esto:

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) d(x) = \ln(x) + c$$

Donde $v = x$ y $v' = 1$. Si el numerador funciona como derivada del denominador, el resultado de la integración se encuentra en el logaritmo natural del denominador.

Examina el siguiente ejemplo.

1. Observa la fracción dentro de la integral:

$$\int \left(\frac{2x+4}{x^2+4x}\right) d(x)$$

2. Identifica si el numerador funciona como derivada del denominador.

$$v = x^2 + 4x$$
$$v' = 2x + 4$$

Por tanto, $\int \left(\frac{v'}{v}\right) d(x)$. De cumplirse esta condición, entonces se trata de un $\ln(v)$.

$$\int \left(\frac{2x+4}{x^2+4x}\right) d(x) = \ln(x^2 + 4x) + c$$

Integrales con solución de funciones exponenciales base e. Al identificar las funciones exponenciales de base e, este número se debe contener en la integral, ya que e se eleva a la potencia v y se multiplica por la derivada de la potencia v', como se muestra a continuación:

$$\int e^v * v'd(x)$$

El resultado de esta integral estará dado solo por e^v.

$$\int e^v * v'd(x) = \boldsymbol{e^v} + \mathrm{c}$$

Analiza los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Función exponencial con base e:

$$\int e^x d(x)$$

La función integradora es e^x, por consiguiente:

$$e^v = e^x$$

$$v = x$$

$$v' = 1$$

Entonces, para que se cumpla la condición $\int e^v * v'd(x)$

$$e^x(1)$$

$$\int e^x(1)d(x) = e^x + \mathrm{c}$$

En este caso, el 1 es la derivada de x, por lo que se cumple la fórmula y se puede resumir que:

$$\int e^x d(x) = e^x + \mathrm{c}$$

Ejemplo 2. Función exponencial con base e.

$$\int 6xe^{3x^2}d(x)$$

La función integradora es e^{3x^2}, por consiguiente

$$e^v = e^{3x^2}$$

$$v = 3x^2$$

$$v' = 6x$$

Se observa esta condición:

$$e^v * v'$$

Se cumple:

$$6x * e^{3x^2}$$

Por lo que:

$$\int e^v * v'd(x) = \boldsymbol{e^v} + \mathrm{c}$$

Se resuelve:

$$\int 6xe^{3x^2}d(x) = e^{3x^2} + \mathrm{c}$$

Integración de una función trigonométrica. Al igual que las antiderivadas, el resultado de estas integraciones se encuentra directamente ligado a las fórmulas. La relación se obtiene de manera rápida, así que basta revisar las fórmulas o buscar la identidad trigonométrica.

Ejemplo 3.

$$\int \sec(x)\tan(x)\,d(x)$$

A primera vista se trata de una función con varios rasgos característicos, por ejemplo, una multiplicación de funciones trigonométricas. Como primera opción, tal vez sea oportuno buscar funciones inversas o identidades, aunque existe una fórmula directa:

$$\int \sec(x)\tan(x)\,d(x) = -\boldsymbol{sec(x)} + \mathrm{c}$$

Por ende, antes de proceder de alguna otra forma, primero debes indagar si existe una fórmula directa para las funciones.

Ejemplo 4. En la integral básica $\int \operatorname{sen} d(v)v'd(v)$, se indica una integral del seno de una función (que debe estar en el espacio del ángulo), así que su función debe multiplicarse por la derivada de la función que está en el espacio del ángulo.

Esta es la fórmula de integración básica:

$$\int \operatorname{sen} d(v)v'd(v) = -\boldsymbol{cos(v)} + c$$

$$\int 4x^3 \operatorname{sen}(x^4)d(x)$$

Identifica v y v':

$$v' = 4x^3$$

$$v = x^4$$

Por lo que se cumple la fórmula.

$$\int \operatorname{sen} d(v)v'd(v) = -\boldsymbol{cos(v)} + c$$

Se obtiene como resultado:

$$\int 4x^3 \operatorname{sen}(x^4)d(x) = -\boldsymbol{cos}(x^4) + c$$

Cierre

Como se aprecia en las integraciones anteriores, los valores que pertenecen a v y v' son muy importantes, ya que con ellos se define si los valores de la integral corresponden a la misma función. Si esta condición (v y v') no se cumple, la forma de integración no corresponde a una antiderivada.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Comprender las reglas de integración básica para su correcta separación.
- Reconocer las variables representadas por v y v^' con el fin de seleccionar la función y su derivada correspondiente.

Bibliografía

- Araujo, F. (2018). *Cálculo integral*. Ecuador: Universitaria Politécnica Salesiana.
- Oteyza, M., Lam, E., Hernández, C., y Carrillo, A. (2019). *Calculo Diferencial e Integral* (2ª ed.). México: Pearson.